SAID BOUZAWIT - lycée Abdelali Benchakroune

الدورةالعادية2005

أسئلة :

1) نحسب المميز المختصر: $\Delta'=(1+2i)^2-(1+4i)=-4=(2i)^2$

إذن $z_1=1$ و $z_2=1+4i$.

2) لدينا $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\left[1,\frac{\pi}{6}\right] \Leftarrow \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=[1,2\pi]=1$.

3) $\begin{cases} u(x)=\ln(x) & \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)=x^2 & \Rightarrow v(x)=\frac{x^3}{3} \end{cases} \Leftarrow I=\int_1^e x^2\ln(x)dx=\left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx$

إذن : $I=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2e^3+1}{9}$.

4) نضع $t=\sqrt{x-1}$ إذن $\left.\begin{matrix} t=1 \Leftarrow x=2 \\ t=\sqrt{3} \Leftarrow x=4 \end{matrix}\right\}$ و $dx=2t\,dt \Leftarrow x=t^2+1$

ومنه $\int_2^4\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+t^2}dt=2[arctg(t)]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

التمرين الأول:

1) لدينا $\Omega(1,0,1)$ مركز الفلكة (S) و $r=\sqrt{2}$ شعاعها.

$d(\Omega,(P))=\frac{|1+0-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r \Leftarrow (P)$ مماس للفلكة (S) .

2)نقطة تماس (S) و (P) هي H المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) .

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على (P) ، إذن $\vec{n}(1,1,0)$ المنظمية على (P) موجهة ل (Δ) .

H هي تقاطع (Δ) و (P) ، مثلوث إحداثياتها هو حل النظمة: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftarrow 1+t+t-3=0$

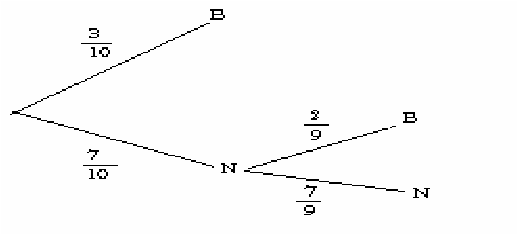
إذن $t=1$ و منه $H(2,1,1)$.

التمرين الثاني

1) $p(A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$ و $B=\overline{A} \Leftarrow$ $p(B)=1-p(A)=\frac{8}{15}$.

2) أ- $p(C)=\frac{3}{10}$.

ب- $p(D)=p(C)+p(\overline{C})p_{\overline{C}}(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{8}{15}$.



يمكن استعمال الشجرة :

مسألة :

الجزء الأول :

1) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{x-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ ، إذن جدول تغيرات الدالة g هو:

x	0		1		$+\infty$
g'(x)			0		
g(x)		↘	0	↗	

ب- الدالة g تقبل قيمة دنيا عند النقطة 1 ، إذن $g(x)\geq g(1)=0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

2) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا

$$1+g(x)+(x-1)\ln(x)=x-\ln(x)+(x-1)\ln(x)$$
$$=x+(x-2)\ln(x)=h(x)$$

ب- من الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
x-1		−	0	+	
ln(x)		−	0	+	
(x-1)ln(x)		+	0	+	

نستنتج أن $(x-1)\ln(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

3) $(x-1)\ln(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ $\Leftarrow h(x)\geq 1$

إذن $h(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

Said Bouzawit - lycée Abdelali Benchakroune

الجزء الثاني:

1) أ- $\lim\limits_{0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{0^+}x\ln(x)=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{0^+}f(x)=-\infty$.

التأويل المبياني : المنحنى C_f يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$.

ب- $f(x)=1+x.\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ و $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}f(x)=+\infty$.

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

التأويل المبياني : المنحنى C_f يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2) أ- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $f'(x)=\ln(x)+1-2\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{h(x)}{x}$.

ب- حسب السؤال 3 من الجزء الأول، $h(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، إذن $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]0,+\infty[$. و بالتالي f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

3)أ- معادلة (Δ) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f'(1)=h(1)=1$

إذن : $(\Delta)\ :\ y=x$.

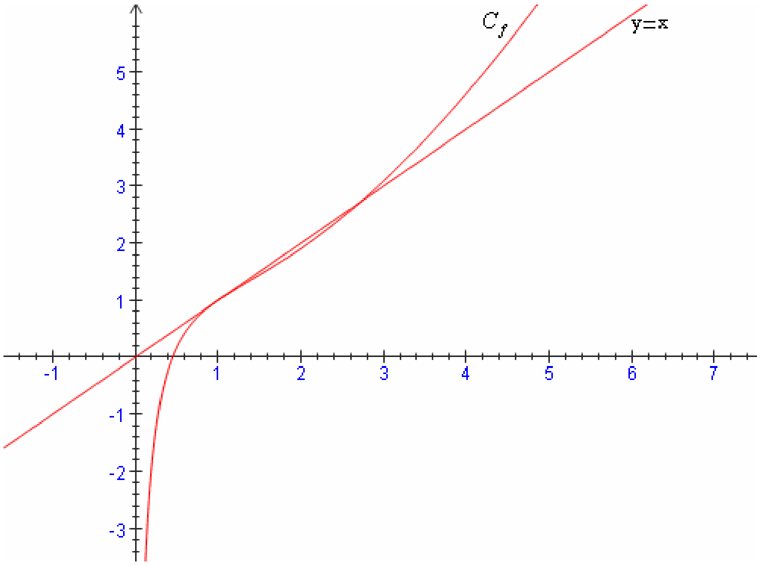
ب- لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-x&=1-(\ln(x))^2+x\ln(x)-x\\ &=(1-\ln(x))(1+\ln(x))-x(1-\ln(x))\\ &=(1-\ln(x))(1+\ln(x)-x)=(\ln(x)-1)g(x)\end{aligned}$$

ج- $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، إذن إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $\ln(x)-1$.

x	0		e		$+\infty$
$\ln(x)-1$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C_f تحت (Δ)	تقاطع	C_f فوق (Δ)	

4)المنحنى:



الجزء الثالث :

1) من أجل $n=0$: $1 \prec u_0 = \sqrt{e} \prec e$ إذن العلاقة صحيحة.

نفترض أن $1 \prec u_n \prec e$ ، وبما أن f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ فإن $f(1) \prec f(u_n) \prec f(e)$

إذن $1 \prec u_{n+1} \prec e$ و منه $1 \prec u_n \prec e$ لكل n من IN.

2) حسب السؤال 3)ج من الجزء الثاني: $f(x)-x \le 0$ لكل x من $]0,e]$

بما أن $1 \prec u_n \prec e$ فإن $f(u_n)-u_n \le 0$ أي $u_{n+1} \le u_n$ لكل n من IN.

3) المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد1 ، إذن فهي متقاربة.

الدالة f متصلة على المجال $I=]1,e[$ و $f(I)=I$ (حسب السؤال 1من الجزءالثالث) والمتتالية متقاربة ، إذن
نهايتها l تحقق $f(l)=l$ و $l \in [1,e]$ (المجال **مغلق**).

$f(l)=l \Leftrightarrow \ln(l)-1=0$ أو $g(l)=0$ حسب السؤال3)ب من الجزء الثاني.

$\Leftrightarrow l=e$ أو $l=1$

بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإن $l=1$.